Моделирование возрастающей и убывающей отдачи в замкнутой экономике[1]

Малков С. Ю.*, Авинова А. Н.**, Кирилюк И. Л.***

В статье проведен анализ математической модели, в которой отрасли экономики могут иметь как убывающую, так и возрастающую отдачу. Показано, что в случае наличия убывающей отдачи во всех отраслях рыночные механизмы обеспечивают устойчивое функционирование экономики. Однако если какие-то отрасли имеют возрастающую отдачу, то устойчивое рыночное функционирование возможно лишь в ограниченном диапазоне параметров системы, за пределами которого необходимо директивное управление.

Ключевые слова: возрастающая и убывающая отдача, математическое моделирование в экономике.

In the article the mathematical model in which the industry can have both diminishing and increasing returns is examined. It is shown, that in case of diminishing returns in all industries, market mechanisms provide a stable functioning of the economy. But if some industries have increasing return, sustainable market functioning is possible only within a limited range of economic parameters.

Key words: increasing and diminishing returns, mathematical models in economics

JEL code: C53.

1. Введение

Традиционно, начиная с классических работ Д. Рикардо, в макроэкономических исследованиях считается, что при увеличении масштабов производства *предельные издержки*[2] повышаются (отдача от факторов производства уменьшается). Так, в наиболее часто используемой в макроэкономических моделях производственной функции Кобба — Дугласа

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, (проект № 11-02-00088а) и РФФИ (проект № 13-06-00576)..

[2] Предельные издержки – это дополнительные, добавочные издержки, которые вызваны выпуском дополнительной единицы продукта. Предельные издержки иногда называют дифференциальными издержками (т.е. разностными). Предельные издержки определяются как разность между последующими и предыдущими валовыми издержками.

* s@malkov.org, ** avinovskaya_n@mail.ru, *** igokir@rambler.ru

$$F = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \qquad (1)$$

где K — капитал, а L — труд, показатели степени α и β предполагаются меньшими единицы, что отражает уменьшающуюся отдачу от данных факторов производства. Однако данная ситуация является отнюдь не всеобщей как на уровне экономик отдельных стран, так и на уровне отдельных отраслей экономики (анализ этого вопроса проведен ранее в статье С. Г. Кирдиной и С. Ю. Малкова в настоящем сборнике). Интерес к анализу и моделированию эффектов возрастающей отдачи в последние годы значительно вырос (Arthur, 1989, 1994, 1996; Krugman, 1979, 1991; Pierson, 2000; Romer, 1986; Кирдина, Малков, 2010; Малков, Кирилюк, 2009; и др.). Данная работа посвящена анализу влияния характера отдачи на устойчивость функционирования экономических систем.

Для анализа особенностей функционирования *замкнутой* экономики, в состав которой входят отрасли как с повышающимися, так и с понижающимися предельными издержками, использована динамическая воспроизводственная неравновесная математическая модель, описывающая движение продуктовых и денежных потоков между основными секторами экономики в краткосрочном периоде (замкнутость экономики понимается в том смысле, что ее хозяйственные связи с внешним миром относительно малы, вследствие чего ими можно пренебречь).

2. Общая постановка задачи

В рассматриваемой модели экономика представлена как система взаимодействия *трех* секторов:

— первого сектора, который производит товары и услуги для конечного потребления (сектор C),

— второго, «инфраструктурного», сектора (сектор I), который обеспечивает необходимые условия для работы сектора C, а именно производит сырье, энергию, осуществляет грузовые перевозки и т. п.,

— третьего сектора домохозяйств (сектор H), который потребляет производимые сектором C товары и услуги и одновременно участвует в их производстве, обеспечивая сектора C и I рабочей силой. Система характеризуется полной занятостью, то есть все работоспособное население трудится в каком-либо из первых двух секторов.

Общее описание взаимодействия этих секторов приведено ранее в статье С. Г. Кирдиной и С. Ю. Малкова в настоящем сборнике, схема финансовых потоков между секторами приведена на рис. 1.

Динамическая математическая модель, описывающая систему взаимодействий в трехсекторной экономике, имеет следующий вид (величины, относящиеся к сектору С, имеют нижний индекс 1, относящиеся к сектору I — индекс 2, относящиеся к сектору H — индекс 3):

$$dU_1/dt=(Q_{31}+Q_{32})\cdot p_1+Q_{21}\cdot p_1-Q_{12}\cdot p_2-G_1, \tag{2}$$

$$dU_2/dt=Q_{12}\cdot p_2-Q_{21}\cdot p_1-G_2, \tag{3}$$

$$dU_3/dt=G_1+G_2-(Q_{31}+Q_{32})\cdot p_1, \tag{4}$$

$$dp_1/dt=a_1\cdot p_1\cdot(Q_{31}+Q_{32}+Q_{11}+Q_{21}-F_1), \tag{5}$$

$$dp_2/dt=a_2\cdot p_2\cdot(Q_{12}-F_2). \tag{6}$$

Величины Q_{ij} и F_i определяются в единицах выпускаемого (потребляемого) продукта, величины U_i, G_i и p_i — в денежных единицах; n_1 и n_2 — доли населения, работающего в секторах С и I соответственно ($n_1+n_2=1$).

Уравнения (2)–(4) характеризуют динамику изменения денежных средств U_i (i=1, 2, 3) в производственном, инфраструктурном и потребительском секторах соответственно. Здесь:

G_1 и G_2 — доходы населения, работающего в секторах С и I, получаемые в виде зарплаты и других выплат;

$Q_{31}\cdot p_1$ и $Q_{32}\cdot p_1$ — объем (в денежном выражении) спроса населения, работающего соответственно в С и I секторах экономики, на товары и услуги, производимые в секторе С. Он определяется ценой продукта p_1 и величиной потребительского спроса соответствующих групп населения (Q_{31} и Q_{32}), пропорционального их покупательной способности. Если денежная величина потребительского спроса выше, чем доходы населения в данный момент в виде зарплаты, то денежные средства «перетекают» в производственный сектор С, что отражается уравнением (2). Если зарплата населения в определенный период превышает его денежный потребительский спрос, то имеет место переток денежных средств в сектор H — уравнение (4);

Q_{21} — количество продукции сектора С, необходимое сектору I для организации своего производства;

Q_{12} — спрос сектора С на продукцию сектора I (сырье, энергия, транспортные услуги и т.п.).

Уравнения (5) и (6) определяют динамику изменения цен на производимую в секторах С и I продукцию под воздействием соотношения спроса и предложения. Здесь:

Q_{11} — количество продукта для внутреннего потребления в производственном секторе, необходимое для воспроизводственного процесса;

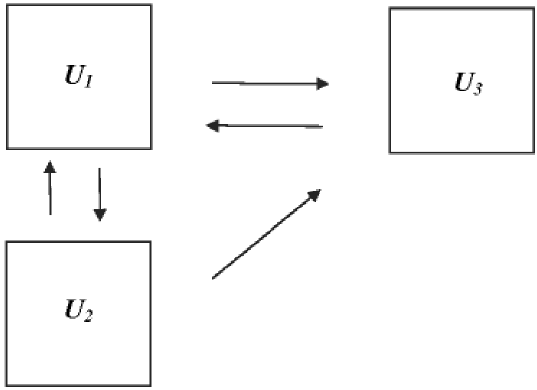

Рис. 1. Обобщенная схема финансовых потоков в трехсекторной экономике

F_1 и F_2 — объем производства секторов C и I, выраженный в единицах продукта, произведенного за единицу времени;
a_i — коэффициент пропорциональности, характеризующий скорость установления равновесной цены (dp_i/dt) и характер взаимодействия сферы производства и обращения, в случае неизменных цен $a_i = 0$. Если величина производимой продукции F_i больше, чем спрос на нее, то цена падает, и наоборот.

Система уравнений (2)–(6) предполагает, что суммарное количество денег в системе не изменяется, эмиссия отсутствует:

$$U_1 + U_2 + U_3 = M = const. \tag{7}$$

В соответствии с принятыми в модели допущениями выражения для Q_{ij}, G_i и F_i могут быть конкретизированы.

Покупательная способность финансовых средств U_i зависит от уровня потребительских цен p_1 (или другими словами, от уровня инфляции) и равна U_i/p_1.

На внутреннее потребление производящих секторов C и I расходуется доля k_1 и k_2 их денежных средств (с учетом покупательной способности):

$$Q_{11} = k_1 \cdot U_1/p_1,\ Q_{21} = k_2 \cdot U_2/p_1. \tag{8}$$

Продукция сектора I составляет долю λ в физическом объеме продукции сектора C:

$$Q_{12} = \lambda \cdot F_1. \tag{9}$$

Зарплата в секторе С имеет сдельный характер и составляет долю h от стоимости производимой продукции:

$$G_1 = p_1 \cdot h \cdot F_1 . \tag{10}$$

В первом приближении можно считать, что затраты на зарплату в секторах С и I пропорциональны количеству работников:

$$G_1 / G_2 = n_1 / n_2, \tag{11}$$

а уровни зарплат одинаковы:

$$G_1 / \; n_1 = G_2 \; / n_2, \tag{12}$$

где n_1 и n_2 — количество работников в секторах С и I соответственно.

Поскольку работники секторов С и I имеют одинаковый уровень доходов, их можно объединить в одну потребительскую группу. Будем считать, что они на потребление в единицу времени тратят долю k_3 имеющихся в своем распоряжении средств:

$$Q_3 = Q_{31} + Q_{32} = k_3 \cdot U_3 / p_1. \tag{13}$$

Объем производимой продукции в секторах С и I зависит от величины производственных затрат $k_i \cdot U_i / p_1$ и от количества рабочей силы n_i:

$$F_i = F_i(n_i, k_i \cdot U_i / p_1). \tag{14}$$

С учетом вышесказанного система (2)–(6) преобразуется к виду:

$$dU_1 / dt = k_3 \cdot U_3 + k_2 \cdot U_2 - \lambda \cdot F_1 \cdot p_2 - h \cdot F_1 \cdot p_1, \tag{15}$$

$$dU_2 / dt = \lambda \cdot F_1 \cdot p_2 - k_2 \cdot U_2 - h \cdot F_1 \cdot p_1 \; n_2 / n_1, \tag{16}$$

$$dU_3 / dt = h \cdot F_1 \cdot p_1 \; / n_1 - k_3 \cdot U_3, \tag{17}$$

$$dp_1 / dt = a_1 \cdot p_1 \cdot (k_3 \cdot U_3 / p_1 + k_1 \cdot U_1 / p_1 + k_2 \cdot U_2 / p_1 - F_1), \tag{18}$$

$$dp_2 / dt = a_2 \cdot p_2 \cdot (\lambda \cdot F_1 - F_2). \tag{19}$$

Уравнения (15)–(19) описывают динамику рассматриваемой экономической системы.

Обычно при макроэкономическом моделировании предполагается, что рассматриваемая социально-экономическая система находится в состоянии равновесия (или близком к нему) и денежные потоки из сектора в сектор компенсируют друг друга. В этом случае правые части в системе (15)–(19) можно приравнять нулю. Это позволяет перейти от рассмотрения динамической системы дифференциальных уравнений к анализу более простой системы алгебраических уравнений, описывающей баланс доходов и расходов секторов при равновесных ценах. Рассмотрим, при каких условиях возможно установление такого макроэкономического равновесия.

3. Моделирование равновесных экономических состояний

Итак, при макроэкономическом равновесии правая часть уравнений (15)–(19) равна нулю и во всех секторах экономики устанавливается баланс доходов и расходов:

$$k_3 \cdot U_3 + k_2 \cdot U_2 - \lambda \cdot F_1 \cdot p_2 - h \cdot F_1 \cdot p_1 = 0, \quad (20)$$

$$\lambda \cdot F_1 \cdot p_2 - k_2 \cdot U_2 - h \cdot F_1 \cdot p_1 \; n_2 / n_1 = 0, \quad (21)$$

$$h \cdot F_1 \cdot p_1 \; / n_1 - k_3 \cdot U_3 = 0, \quad (22)$$

$$k_3 \cdot U_3 / p_1 + k_1 \cdot U_1 / p_1 + k_2 \cdot U_2 / p_1 \; \text{-} F_1 = 0, \quad (23)$$

$$\lambda \cdot F_1 - F_2 = 0. \quad (24)$$

Из этих уравнений следует, что в условиях равновесия финансовые средства секторов принимают значения:

$$U_1 / p_1 = F_1 \cdot (1 - h - \lambda \cdot p_2 / p_1) / k_1, \quad (25)$$

$$U_2 / p_1 = F_1 \cdot (\lambda \cdot p_2 / p_1 - h \; n_2 / n_1) / k_2, \quad (26)$$

$$U_3 / p_1 = F_1 \cdot h / \; n_1 \cdot k_3, \quad (27)$$

а объемы производства секторов C и I удовлетворяют соотношению:

$$F_2 = \lambda \cdot F_1. \quad (28)$$

Из (25) и (26) видно, что состояние экономической системы существенным образом зависит от p_2 / p_1, то есть от отношения цен на продукцию секторов C и I. При этом должны выполняться условия:

$$1 - h - \lambda \cdot p_2 / p_1 > 0 \quad (29)$$

$$n_1 \cdot \lambda \cdot p_2 / p_1 - n_2 \cdot h > 0 \quad (30)$$

Если данные условия не соблюдаются, функционирование экономической системы невозможно: невыполнение условия (29) приводит к банкротству сектора C, невыполнение условия (30) приводит к банкротству сектора I. Высокое значение p_2 / p_1 улучшает финансовое состояние сектора I, но ухудшает состояние сектора C и наоборот.

Какие же механизмы способны обеспечить оптимальное состояние экономики, то есть устойчивое функционирование секторов экономики при максимально возможном уровне производства товаров и услуг для населения, или по крайней мере гарантированно обеспечить выполнение условий (29)–(30)?

Для ответа на этот вопрос необходимо учесть конкретный вид функций F_1 и F_2.

Будем считать, что функции F_i (i=1,2) имеют вид (1). Для принятых в модели обозначений выражения для Fi записываются следующим образом:

$$F_i = f_i \cdot n_i^{bi} \cdot (k_i \cdot U_i / p_1)^{ci}, \tag{31}$$

где f_i — параметр, характеризующий уровень производительности труда (чем выше значение f_i, тем больше выпуск продукции на единицу вложенных средств при прочих равных условиях); n_i — аналог величины L в выражении (1), то есть затраты труда. b_i — показатель степени при величине n_i (он меньше единицы, поскольку увеличение численности работников n_i приводит к увеличению организационных издержек); $k_i \cdot U_i / p_1$ — аналог величины K в выражении (1); коэффициент c_i характеризует тип производственной функции:
при $0 < c_i < 1$ функция F_i — с убывающей отдачей по переменной U_i / p_1, что соответствует уменьшающейся отдаче от вложений (то есть повышающимся предельным издержкам);
при $c_i > 1$ функция F_i — с возрастающей отдачей по переменной U_i / p_1, что соответствует увеличивающейся отдаче от вложений (то есть понижающимся предельным издержкам).

Как уже упоминалось, типичной ситуацией для макроэкономики является убывающая отдача по U_i / p_1 функций F_i, особенно в случае отраслей, производящих продукцию конечного потребления. В случае инфраструктурных отраслей это не столь типично: достаточно часто встречаются ситуации, когда функция F_2 — выпуклая по U_2 / p_1 (это происходит, например, когда расширение производства осуществляется путем наращивания уже созданных сетевых структур, что характерно для транспортных систем, связи, энергоснабжения и т. п.).

В соответствии с этим далее будем считать, что F_1 имеет убывающую отдачу от вложений, а F_2 может быть как с убывающей, так и с возрастающей отдачей.

Ситуация 1. Рассмотрим сначала случай, когда во всех секторах экономики при расширении производства имеет место убывающая отдача (рис. 2).

Для определенности примем $c_1 = c_2 = 0{,}5$ и $b_1 = b_2 = 0{,}5$. Тогда из (25) и (31) имеем:

$$F_1 = n_1^{2b_1} \cdot f_1^{2} \cdot (1 - h - \lambda \cdot p_2 / p_1). \tag{32}$$

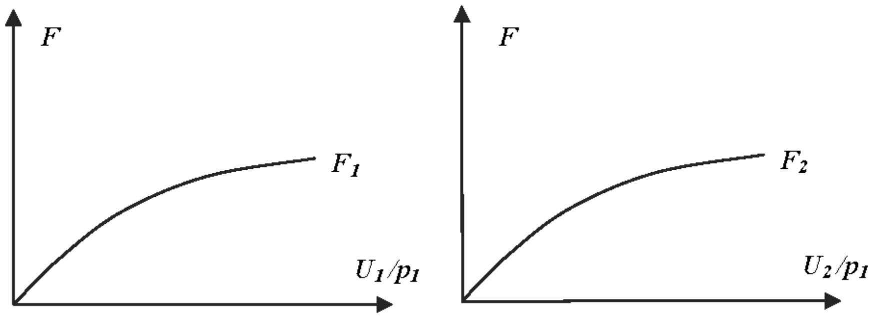

Рис. 2. Вид «классических» производственных функций F_1 и F_2, соответствующих «закону убывающей отдачи»

Подставляя полученное выражение в (25)–(27), определяем равновесные значения U_1/p_1, U_2/p_1 и U_3/p_1 для рассматриваемого случая:

$$U_1/p_1 = n_1^{2b_1} \cdot f_1^{\,2} \cdot (1 - h - \lambda \cdot p_2/p_1)_2/k_1, \tag{33}$$

$$U_2/p_1 = n_1^{2b_1} \cdot f_1^{\,2} \cdot (1 - h - \lambda \cdot p_2/p_1) \cdot (\lambda \cdot p_2/p_1 - h \cdot n_2/n_1)/k_2, \tag{34}$$

$$U_3/p_1 = n_1^{2b_1} \cdot f_1^{\,2} \cdot (1 - h - \lambda \cdot p_2/p_1) \cdot h/(n_1\, k_3). \tag{35}$$

Полученные выражения позволяют провести анализ влияния отдельных параметров на состояние экономической системы.

В нашем случае наиболее интересным является влияние отношения цен p_2/p_1 на равновесное состояние экономической системы (см. уравнения (33)–(35)). Типовые графики изменения финансовых накоплений секторов экономики в номинальном (U_1, U_2, U_3) и реальном выражении (U_1/p_1, U_2/p_1, U_3/p_1), а также выпуска продукции F_1 сектором С и потребления товаров и услуг населением Q_3 при изменении параметра $\lambda \cdot p_2/p_1$ изображено на рисунках 3, 4 и 5.

Из рисунков видно, что увеличение параметра $\lambda \cdot p_2/p_1$ (отражающего величину финансовых затрат сектора С на продукцию сектора I) приводит к уменьшению производства товаров и услуг и их потребления населением, к инфляции денежных средств, к снижению реальных доходов населения. При этом финансовые средства «перекачиваются» в «инфраструктурный» сектор (рис. 3), его вес в экономике растет, но сама экономика слабеет, покупательная способность денег падает. (Несмотря на то что при увеличении $\lambda \cdot p_2/p_1$ значение U_2 в номинальном выражении непрерывно возрастает (рис. 3), U_2/p_1 в реальном выражении с учетом инфляционных про-

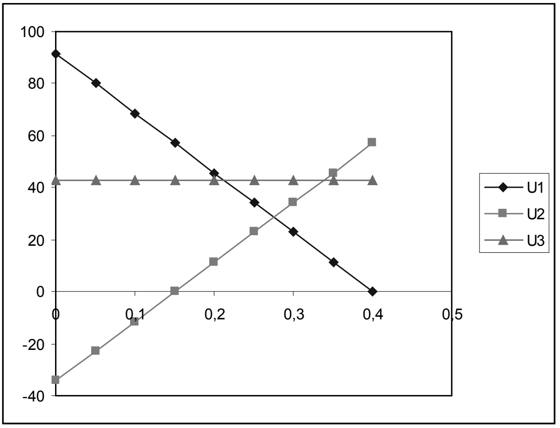

Рис. 3. Типовые графики изменения финансовых средств секторов экономики в номинальном выражении (U_1, U_2, U_3) при изменении параметра $\lambda \cdot p_2/p_1$

(значения по осям —в относительных единицах, денежная масса М = 100 ед.; отрицательные значения U_2 при низких значениях $\lambda \cdot p_2/p_1$ означают убыточность сектора *I*)

цессов растет лишь до значения $\lambda \cdot p_2/p_1 = (1\text{-}h + h \cdot n_2/n_1)/2$ (рисунок 4), а далее начинает падать.)

С другой стороны, при уменьшении параметра $\lambda \cdot p_2/p_1$ финансовые возможности инфраструктурного сектора быстро ухудшаются; при $\lambda \cdot p_2/p_1 = h \cdot (n_2/n_1)$ сектор I становится банкротом ($U_2 = 0$), что приводит к дестабилизации всей экономической системы.

Наиболее предпочтительным является состояние экономики, когда отношение цен p_2/p_1 несколько превышает значение $p_2/p_1 = (h/\lambda) \cdot (n_2/n_1)$, при этом достигается высокий уровень производства и потребления при устойчивом функционировании производящих секторов. В принципе, такого отношения цен можно добиться посредством государственного регулирования (что часто и делается), однако возникает вопрос: может ли такое отношение цен установиться без государственного вмешательства в результате рыночных механизмов.

Чтобы на основе рассматриваемой модели определить отношение цен p_2/p_1, устанавливаемое в условиях рыночного равновесия, необходимо задаться видом функции f_2 и использовать балансовое уравнение (28). Как уже оговаривалось выше, будем считать, что f_2 — функция типа (31)

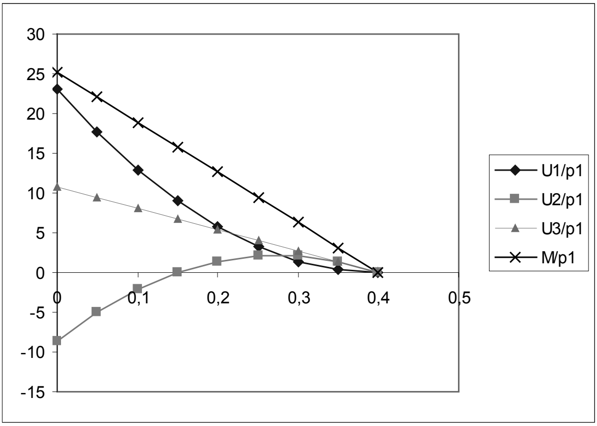

Рис. 4. Типовые графики изменения финансовых средств секторов экономики в реальном выражении (U_1/p_1, U_2/p_1, U_3/p_1) и покупательной способности денег (M/p_1) при изменении параметра $\lambda \cdot p_2/p_1$

(значения по осям — в относительных единицах; отрицательные значения U_2 при низких значениях $\lambda \cdot p_2/p_1$ означают убыточность сектора I)

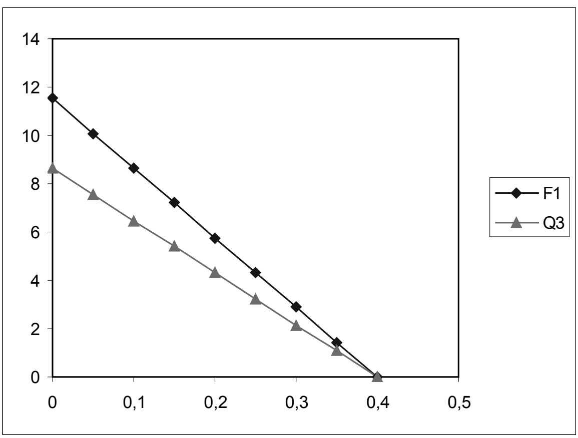

Рис. 5. Типовые графики изменения выпуска продукции сектором C (F_1) и потребления товаров и услуг населением (Q_3) при изменении параметра $\lambda \cdot p_2/p_1$

(значения по осям — в относительных единицах) с параметром c_2 = 0,5. Тогда подставляя ее в (28), получаем выражение для p_2/p_1:

$$p_2/p_1 = (\varepsilon \cdot (1-h) + \omega^2 \cdot h) / (\lambda \cdot (\omega + \varepsilon)), \tag{36}$$

где $\varepsilon = (\lambda \cdot f_1/f_2)^2$, $\omega = n_2/n_1$.

Здесь важно то, что рыночные цены p_2 и p_1 устанавливаются при любых значениях параметров λ, f_1 и f_2, характеризующих производство, но существенным образом зависят от них.

Если технологи производства неизменны, то значения параметров λ, f_1 и f_2 — постоянные величины. Значение параметра h определяется уровнем зарплат в секторе С. Таким образом, инфраструктурный сектор реально может влиять на цены лишь изменением объемов производства своей продукции. Расширение производства в секторе I связано с увеличением числа работников и, следовательно, зависит от параметра $\omega = n_2/n_1$ (то есть от отношения числа работников в секторе С и секторе I): чем выше значение ω, тем большая часть населения работает в секторе I. Рассмотрим зависимость изменения p_2/p_1 от величины ω.

Анализ уравнений модели показывает, что значение ω может изменяться в диапазоне от 0 до $(1-h)/h$ (нижняя граница означает отсутствие производства в секторе *I*, верхняя граница соответствует снижению рентабельности производства в секторе *I* ниже нуля). При этом на границах данного диапазона соотношение цен p_2/p_1 достигает значения $(1-h)/\lambda$, при котором экономика уже не может нормально функционировать (рис. 5). Вид зависимости величины p_2/p_1 от значения параметра ω изображен на рисунке 6.

Минимального значения p_2/p_1 достигает при величине ω, равной:

$$\omega_m = (-\varepsilon \cdot h + (\varepsilon \cdot h \cdot (1-h+\varepsilon \cdot h))^{0,5}) / h. \tag{37}$$

Величина p_2/p_1 при этом равна:

$$(p_2/p_1)_{min} = 2 \cdot h \cdot \omega_m / \lambda \tag{38}$$

Данное значение меньше величины $(1-h+h \cdot n_2/n_1)/(2 \cdot \lambda)$, при которой U_2/p_1 достигает максимума (см. рисунок 6), при выполнении условия:

$$3 \cdot (\lambda \cdot f_1/f_2)^2 < (1-h)/h, \tag{39}$$

то есть когда зависимость сектора *С* от сектора *I* не слишком большая (низкое значение λ), а производительность труда достаточно высокая (большое значение f_1 и f_2). При этом, как видно из выражения (36), на величину рыночного соотношения p_2/p_1 можно влиять путем изменения экономических и производственных параметров системы.

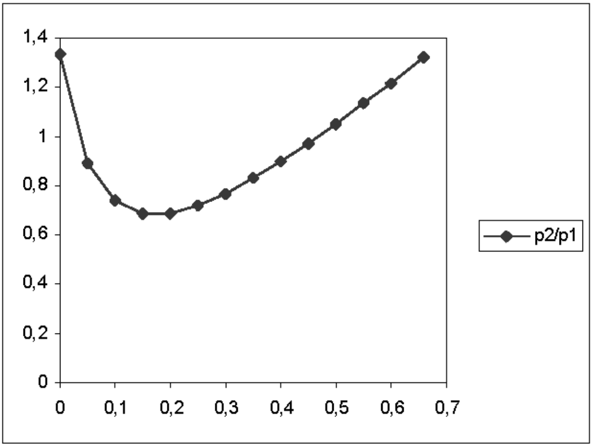

Рис. 6 — Типичный вид зависимости величины p_2/p_1 от значения параметра ω (для функции F_2 с убывающей отдачей)

Таким образом, если функции F_1 и F_2 — с убывающей отдачей, то, как показывает модель, при любом сочетании параметров возможно функционирование экономики на основе рыночного ценообразования. Проблема заключается лишь в оптимизации этого функционирования (например, с помощью соответствующей системы налогообложения) в интересах конечного потребителя.

Ситуация 2. Рассмотрим теперь случай, когда в инфраструктурном секторе *I* имеет место возрастающая отдача (рис. 7).

Вид функций, как и в предыдущем случае, задается выражением (31). Для определенности примем $b_1 = b_2 = 0{,}5$; $c_1 = 0{,}5$; $c_2 = 2$. Выражения (32)–(35) остаются прежними, поскольку они в явном виде зависят только от функции F_1, вид которой не изменился. Изменяется лишь входящее в эти выражения соотношение цен p_2/p_1, устанавливаемое в условиях рыночного равновесия. Подставляя функции F_1 и F_2 в балансовое уравнение (28), получаем алгебраическое уравнение для определения p_2/p_1:

$$(1-h-\lambda \cdot p_2/p_1) \cdot (\lambda \cdot p_2/p_1 - \omega \cdot h)^2 = \lambda \cdot (\omega+1)^{3/2} / (f_1^2 \cdot f^2\, \omega^{1/2}). \qquad (40)$$

Решение этого уравнения имеет достаточно громоздкий вид, поэтому мы его не приводим, обсудим лишь его свойства.

В отличие от предыдущего случая, когда обе функции F_1 и F_2 были с убывающей отдачей от вложений U_i/p_1 (рис. 2), в рассматриваемом

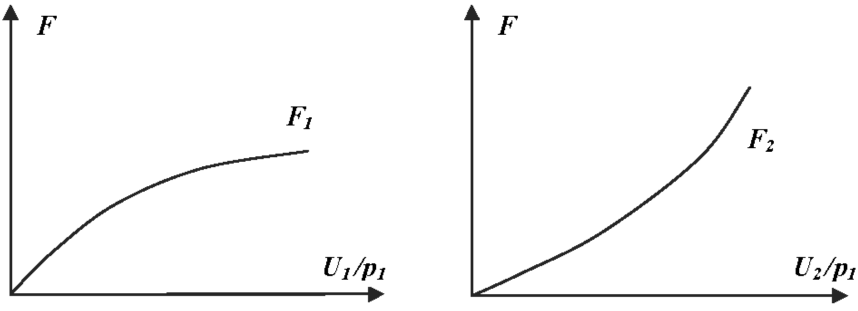

Рис. 7. Вид производственных функций F_1 и F_2
в случае возрастающей отдачи в инфраструктурном секторе
и убывающей отдачи в секторе производства предметов потребления

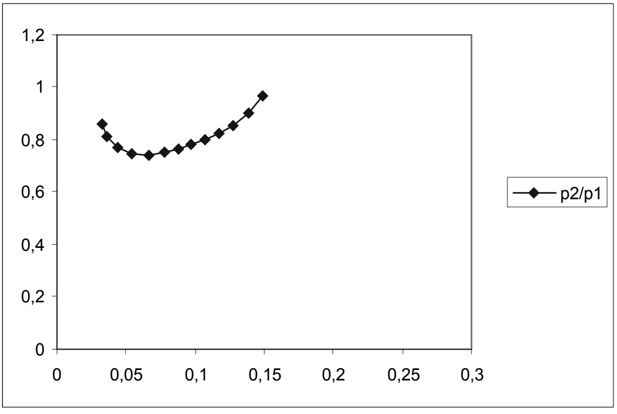

Рис. 8. Типичный вид зависимости величины p_2/p_1
от значения параметра ω
(для функции F_2 с возрастающей отдачей)

случае, когда функция F_2 имеет возрастающую отдачу, значения p_2/p_1 определены не во всем диапазоне ω от 0 до $(1-h)/h$, а в более узком диапазоне от $\omega_{min} > 0$ до $\omega_{max} < (1-h)/h$ (рис. 8), при этом значения ω_{min} и ω_{max} существенным образом зависят от параметров системы (рис. 11), причем диапазон (ω_{min}, ω_{max}) сужается при увеличении параметра $\lambda/(f_1^{\,2}\cdot f_2)$.

Из рисунка 8 видно, что для каждого значения h имеется предельное значение параметра $\lambda/(f_1^{\,2}\cdot f_2)$, при котором еще существует возможность

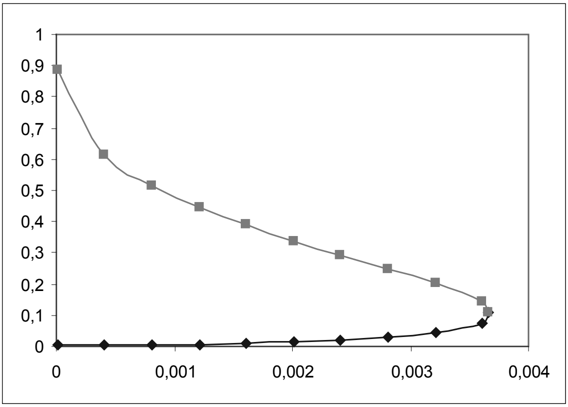

Рис. 9. Изменение значений ω_{max} (верхний график) и ω_{min} (нижний график) в зависимости от величины параметра $\lambda/(f_1^2 \cdot f_2)$ при $\boldsymbol{h} = 0{,}5$

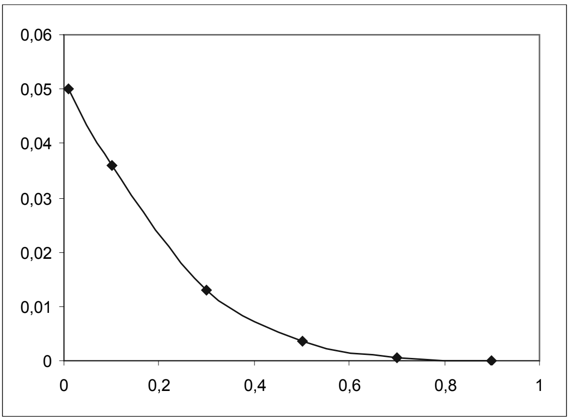

Рис. 10. Зависимость предельного значения $\lambda/(f_1^2 \cdot f_2)$ от величины h, отражающей уровень зарплат

рыночного формирования цен p_2 и p_1 в соответствии с уравнениями (18) и (19). При этом чем выше значение h (то есть чем больше доля затрат на зарплату в себестоимости продукции), тем ниже предельное значение $\lambda/(f_1^2 \cdot f_2)$ (рис. 10).

Из приведенных графиков можно сделать вывод, что в случае, когда F_1 — с убывающей отдачей, а F_2 — с возрастающей отдачей, самоорганизация экономики на рыночных принципах возможна *не всегда*, а лишь при определенном соотношении параметров; причем чем выше значение параметра $\lambda/(f_1^2 \cdot f_2)$, тем более узкой становится зона существования Y-экономики (меньше допустимый интервал ω и h). Вне этой зоны институты Y-экономики будут приводить к падению производства, вымыванию финансовых средств из сектора C с его последующим банкротством. В этой ситуации законы самоорганизация требуют формирования X-экономики и свойственных ей методов макроэкономического регулирования. Модель предусматривает такие методы, как:

1) регулирование цен и зарплат;

2) целевое финансовое стимулирование производственных секторов C и I;

3) жесткое планирование выпуска продукции «инфраструктурного» сектора в соответствии с потребностями сектора производства предметов потребления;

Возможно сочетание этих методов.

Регулирование цен может выражаться, например, в их фиксации на некотором уровне, что приводит к замене уравнений (18) и (19) на следующие:

$$p_1(t) = p_{01} \text{ и } p_2(t) = p_{02}. \tag{41}$$

Чтобы выполнялось финансовое равновесие при условии $M = const$ (см. уравнение (7)), фиксированные цены p_{01} и p_{02} должны быть выбраны таким образом, чтобы были сбалансированы уравнения (15)–(17). Однако при этом не будет полностью удовлетворяться спрос на продукцию со стороны населения, экономика будет дефицитной (такая ситуация была в СССР перед его распадом).

Целевое финансовое стимулирование производственных секторов может осуществляться, например, за счет государственных субсидий при соответствующем увеличении денежной массы M. Эта мера носит инфляционный характер, но результатом может стать стабилизация и развитие производства.

Жесткое планирование выпуска продукции инфраструктурного сектора в соответствии с потребностями сектора C приводит, по существу, к объединению секторов C и I в один агрегированный сектор, внутри которого организация производства осуществляется на плановой основе с целью обеспечения оптимальных пропорций, соответствующих соотношению (28). В этом случае агрегированный производственный сектор может быть охарактеризован единой производственной функцией, а экономика становится двухсекторной.

4. Анализ агрегированной двухсекторной модели

При переходе от трехсекторной экономической модели к агрегированной двухсекторной модели возникает следующая задача: как определить вид производственной функции агрегированного сектора, если мы знаем вид производственных функций для каждого из входящих в него секторов?

Рассмотрим данную задачу применительно к модели (15)–(19), (31) и объединим сектора C и I в единый производственный сектор.

Схематично двухсекторная модель выглядит следующим образом (рис. 11).

Связи между секторами в трехсекторной модели отображены пунктирными линиями, связи в агрегированной двухсекторной модели — сплошными линиями. Видно, что количество связей в системе уменьшается, потому что часть из них становится внутренними.

Уменьшается и количество переменных: в трехсекторной модели было пять переменных (U_1, U_2, U_3, p_1, p_2), в двухсекторной модели их стало три ($U_\Sigma = U_1 + U_2, U_3, p_1$).

Соответственно, упрощается система уравнений, но при этом приходится делать ряд допущений, в частности:
поскольку мы объединяем сектора C и I в единый сектор, то целесообразно считать, что $\lambda F_1 \cong F_2$, поскольку это обусловлено потребностями производства. По той же логике можно не рассматривать цену p_2, так как она стала внутренней для агрегированного производственного сектора (обоснованность этого допущения следует из теоремы Тихонова, поскольку p_2 является «быстрой» переменной);
целесообразно считать, что $k_1 \cong k_2 \cong k_\Sigma$, тогда производственные затраты агрегированного сектора можно представить как:

$$k_1 \frac{U_1}{p_1} + k_2 \frac{U_2}{p_1} = \frac{k_\Sigma}{p_1}(U_1 + U_2) = \frac{k_\Sigma}{p_1} U_\Sigma; \tag{42}$$

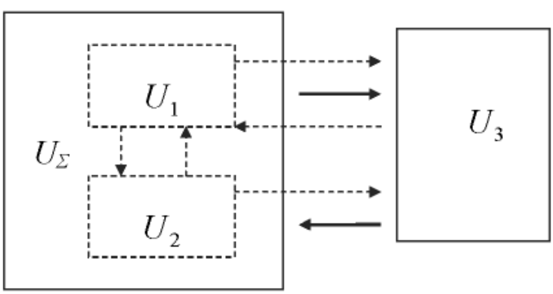

Рис. 11 — Простейшая когнитивная модель двухсекторной экономики вместо двух производственных функций остается одна F_1 — соответствующая выпуску конечной продукции, потребляемой населением, но эта функция должна зависеть уже не от U_1 (такой переменной уже нет), а от $U\Sigma$: $F_1 = F_1(U_\Sigma)$.

Будем по-прежнему считать, что денежная масса M постоянна, то есть: $U_\Sigma + U_3 = M$; $U_3 = M - U_\Sigma$.

В результате получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{U}_\Sigma = k_3 U_3 - hF_1 p\,; & (43) \\ U_3 = M - U_\Sigma\,; & (44) \\ \dfrac{\dot{p}_1}{p_1} = a_1\left(\dfrac{k_3}{p_1}U_3 + \dfrac{k_\Sigma}{p_1}U_\Sigma - F_1(U_\Sigma)\right). & (45) \end{cases}$$

Система уравнений становится проще, однако возникает проблема определения аналитического выражения для $F_1(U_\Sigma)$. Введем переменные u_1 и u_2, определяемые следующим образом:

$$\frac{U_1}{U_\Sigma} = u_1; \qquad \frac{U_2}{U_\Sigma} = u_2 \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 = 1. \tag{46}$$

Поскольку выполняется условие $\lambda F_1 = F_2$, то используя (15) и (16) получаем:

$$\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_\Sigma}{p_1}(1-u_2) = \frac{1}{k_\Sigma}\left(\frac{n_2^{b_2} f_2}{\lambda n_1^{b_1} f_1}\right)^{\frac{1}{c_1}}\left(k_\Sigma \frac{U_\Sigma}{p_1}\right)^{\frac{c_2}{c_1}} u_2^{\frac{c_2}{c_1}},$$

или k

$$1-u_2 = \left(\frac{n_2^{b_2} f_2}{\lambda n_1^{b_1} f_1}\right)^{\frac{1}{c_1}}\left(k_\Sigma \frac{U_\Sigma}{p_1}\right)^{\frac{c_2}{c_1}-1} u_2^{\frac{c_2}{c_1}}. \tag{47}$$

Рассмотрим «классический» случай (рис. 2), когда во всех секторах экономики при расширении производства предельные издержки возрастают (c_i < 1). Пусть $c_2 = c_1 = \dfrac{2}{3}$, $b_1 = b_2 = \dfrac{1}{2}$, тогда из (47) следует:

$$1-u_2 = \left(\frac{n_2^{b_2} f_2}{\lambda n_1^{b_1} f_1}\right)^{\frac{1}{c_1}} u_2 = \frac{u_2}{\delta}, \tag{48}$$

где

$$\delta = \left(\frac{\lambda n_1^{b_1} f_1}{n_2^{b_2} f_2}\right)^{\frac{1}{c_1}} = \left(\frac{\lambda n_1^{0,5} f_1}{n_2^{0,5} f_2}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{49}$$

тогда

$$u_2 = \frac{\delta}{1+\delta}. \tag{50}$$

$$F_1(U_\Sigma) = f_1 n_1^{0,5}\left(k_\Sigma \frac{U_\Sigma}{p_1}(1-u_2)\right)^{\frac{2}{3}} = f_1 n_1^{0,5}\left(k_\Sigma \frac{U_\Sigma}{p_1(1+\delta)}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (51)$$

Из (51) видно, что функция $F_1(U_\Sigma)$ имеет тот же вид (с точностью до постоянного коэффициента), что и функция $F_1(U_1)$.

Преобразуем систему (43)–(45), исключив из нее переменную U_3:

$$\begin{cases} \dot{U}_\Sigma = k_3 M - k_3 U_\Sigma - hp_1 F_1(U_\Sigma), & (52) \\ \dot{p}_1 = a_1(k_3 M - (k_3 - k_\Sigma)U_\Sigma - p_1 F_1). & (53) \end{cases}$$

Исследуем равновесные состояния системы. Приравнивая правые части к нулю, получаем алгебраические уравнения:

$$\begin{cases} k_3 M - k_3 U_\Sigma = hp_1 F_1(U_\Sigma), & (54) \\ k_3 M - (k_3 - k_\Sigma)U_\Sigma = p_1 F_1(U_\Sigma). & (55) \end{cases}$$

откуда:

$$\frac{k_3 M}{h} - \frac{k_3 U_\Sigma}{h} = k_3 M - (k_3 - k_\Sigma)U_\Sigma. \quad (56)$$

Из (53) определяем равновесное значение U_Σ^*:

$$U_\Sigma^* = \frac{k_3(1-h)M}{k_3(1-h) + k_\Sigma h} = M\frac{1}{1 + \dfrac{k_\Sigma h}{k_3(1-h)}} = Mg \quad , \quad (57)$$

где

$$g = \frac{1}{1 + \dfrac{k_\Sigma h}{k_3(1-h)}}. \quad (58)$$

Подставив полученное значение U_Σ^* в уравнение (54), получим:

$$\frac{1}{p_1}\frac{k_3 M}{h}(1-g) = n_1^{0,5} f_1\left(k_\Sigma \frac{Mg}{p_1(1+\delta)}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (59)$$

На рисунке 12 графически представлено решение уравнения (59) относительно переменной $1/p_1$. Левая часть уравнения (59) является прямой линией, проходящей через начало координат с коэффициентом наклона $\dfrac{k_3 M}{h}(1-g)$ (линия 1 на рисунке). Правая часть уравнения представляет собой функцию $F_1(U_\Sigma)$, причем эта функция всюду вогнута (линия 2 на рисунке). Абсциссы точек пересечения линий, отображающих левую и правую части уравнения (59), являются действительными корнями это-

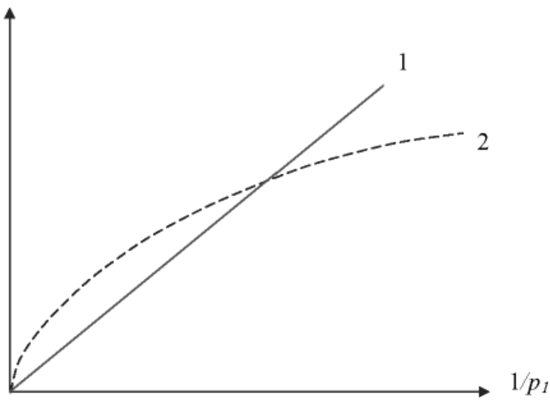

Рис. 12. Графический способ нахождения корней уравнения (59)

го уравнения. Корень $1/p_1 = 0$ соответствует точке неустойчивого равновесия, второй корень соответствует точке устойчивого равновесия. Устойчивое равновесие существует всегда.

Таким образом, можно сделать вывод, что если во всех секторах экономики при расширении производства предельные издержки возрастают ($c_i < 1$), то агрегированная производственная функция обладает этим же свойством. При этом в системе существует устойчивое рыночное равновесие, которое является единственным. Это соответствует утверждению Адама Смита о «невидимой руке рынка».

Рассмотрим теперь неклассический случай (рис. 7), когда в секторе C при расширении производства предельные издержки возрастают, а в секторе I — убывают ($c_1 < 1$, $c_2 > 1$). Пусть $c_2 = \frac{4}{3}$, $c_1 = \frac{2}{3}$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, тогда из (48) следует:

$$1 - u_2 = \left(\frac{n_2^{b_2} f_2}{\lambda n_1^{b_1} f_1}\right)^{\frac{1}{c_1}} \left(k_\Sigma \frac{U_\Sigma}{p_1}\right)^{\frac{c_2}{c_1}-1} u_2^{\frac{c_2}{c_1}} = \frac{k_\Sigma}{\delta} \frac{U_\Sigma}{p_1} u_2^2 . \quad (60)$$

В результате для u_2 получаем квадратное уравнение:

$$u_2^2 + \frac{\delta}{k_\Sigma} \frac{p_1}{U_\Sigma} u_2 - \frac{\delta}{k_\Sigma} \frac{p_1}{U_\Sigma} = 0 , \quad (61)$$

решением которого является выражение:

$$u_2 = -\frac{p_1 \delta}{2k_\Sigma U_\Sigma} + \sqrt{\left(\frac{p_1 \delta}{2k_\Sigma U_\Sigma}\right)^2 + \frac{p_1 \delta}{k_\Sigma U_\Sigma}} , \quad (62)$$

откуда получаем выражение для агрегированной производственной функции $F_1(U_\Sigma)$:

$$F_1 = f_1 n_1^{0,5}\left(k_\Sigma \frac{U_\Sigma}{p_1}(1-u_2)\right)^{\frac{2}{3}} = f_1 n_1^{0,5}\left(\frac{U_\Sigma k_\Sigma}{p_1} + \frac{\delta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \delta \frac{U_\Sigma k_\Sigma}{p_1}}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad (63)$$

которое, в отличие от (51), имеет сигмоидальный характер и не является всюду вогнутой.

Проведем анализ равновесных состояний системы. Повторяя преобразования (52)–(56), получаем, как и в предыдущем случае, равновесное значение $U_\Sigma^* = Mg$ и уравнение для определения равновесных значений p_1:

$$\frac{1}{p_1}\frac{k_3 M}{h}(1-g) = n_1^{0,5} f_1\left(k_\Sigma \frac{Mg}{p_1} + \frac{\delta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \delta \frac{k_\Sigma Mg}{p_1}}\right)^{\frac{2}{3}}. \qquad (64)$$

На рисунке 13 графически представлены различные ситуации решения уравнения (64) относительно переменной $1/p_1$. В этом случае левая часть уравнения (64) является прямой линией, проходящей через начало координат с коэффициентом наклона $\frac{k_3 M}{h}(1-g)$ (см. линии 1, 2 и 3 на рисунке). Правая часть уравнения представляет собой функцию $F_1(U_\Sigma)$, которая имеет сигмоидальный характер (линия 4 на рисунке). Абсциссы

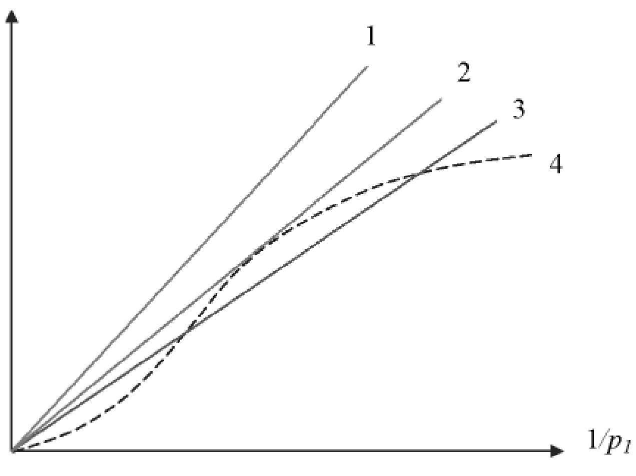

Рис. 13. Графический способ нахождения корней уравнения (64)

точек пересечения линий, отображающих левую и правую части уравнения (64), являются действительными корнями этого уравнения.

Возможны три ситуации:

а) линии пересекаются один раз при $1/p_1 = 0$ (см. линии 1 и 4 на рисунке). В этом случае устойчивых рыночных состояний при конечных значениях p_1 в системе нет. Система в рыночных условиях нестабильна: производство неуклонно падает, цены неограниченно растут;

б) линии пересекаются три раза (см. линии 3 и 4 на рисунке), соответственно, уравнение (64) имеет три действительных корня. Корень с большим значением $1/p_1$ соответствует устойчивому рыночному состоянию, корень с меньшим значением $1/p_1$ является границей существования рынка: справа от этого значения рынок возможен, слева — не возможен;

в) линии имеют две общих точки, причем одна из них является точкой касания (см. линии 2 и 4 на рисунке). Это граничное состояние между ситуациями, когда рынок возможен (см. ситуацию б) и когда он не возможен (см. ситуацию а).

Проведем анализ уравнения (64) и определим условия, при которых реализуются указанные ситуации.

Уравнение (64) может быть преобразовано к виду:

$$x^3(x^3 - 2sx^2 + s^2x - s^3w) = x^3(x(x-s)^2 - s^3w) = 0, \tag{65}$$

где

$$x = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad s = \frac{k_\Sigma g}{M^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{hn_1^{\frac{1}{2}} f_1}{k_3(1-g)}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad w = \frac{1}{(1-h)^3}\left(\frac{\lambda}{n_1^{\frac{1}{2}} f_1 n_2^{\frac{1}{2}} f_2}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{66}$$

причем x, s и w могут принимать только положительные значения.

Нас интересует выражение в скобках, поскольку именно от него зависит количество действительных корней уравнения. Можно показать, что изменение количества действительных коней происходит при условии:

$$w = 4/27. \tag{67}$$

При $w > 4/27$ реализуется ситуация а), при $w < 4/27$ реализуется ситуация б), при $w = 4/27$ реализуется ситуация в).

Из этого следует, что в рассматриваемых условиях устойчивое функционирование экономики, основанной на рыночных принципах, возможно далеко не всегда. Важным производственным показателем здесь является соотношение $\lambda/(f_1 \cdot f_2)$: при низких его значениях рыночные отношения способствуют повышению экономической устой-

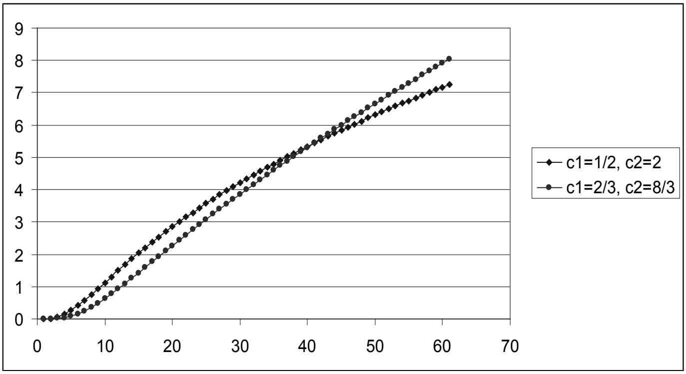

Рис. 14. Примеры агрегированных производственных функций при различных значениях c_1 и c_2 (по оси абсцисс — U_Σ / p_1, по оси ординат — F в относительных единицах)

чивости, при высоких значениях — приводят к экономической дестабилизации.

Все вышесказанное было строго доказано для частного случая, когда $c_1 = 2/3$, а $c_2 = 4/3$. Однако полученные выводы сохраняются и в более общем случае $c_1 < 1$, $c_2 > 1$. Это обусловлено тем, что агрегированная производственная функция при $c_1 < 1$, $c_2 > 1$ всегда принимает сигмоидальный характер (в качестве иллюстрации на рис. 14 приведены агрегированные производственные функции для случаев $c_1 = 1/2$, $c_2 = 2$ и $c_1 = 2/3$, $c_2 = 8/3$), что и определяет особый характер поведения экономической системы.

5. Заключение

Таким образом, из полученных результатов следует, что если для инфраструктурного сектора характерны уменьшающиеся предельные издержки, то рыночные механизмы не гарантируют устойчивость экономической системы: рыночная самоорганизация эффективна, только когда производительность труда в экономике является достаточно высокой, а зависимость от инфраструктурного сектора не слишком большая. Если этого нет, то велика вероятность экономической нестабильности и необходимости перехода от рыночных к распределительным методам регулирования экономики.

В целом результаты моделирования демонстрируют важность анализа особенностей отдачи в различных секторах экономики, от учета которых зависит эффективность и результативность принимаемых управленческих решений.

Литература

Кирдина С.Г., Малков С.Ю. 2010. Два механизма самоорганизации экономики: модельная и эмпирическая верификация. М.: Институт экономики РАН.

Малков С.Ю., Кирилюк И.Л. 2009. Влияние особенностей производственных процессов на макроэкономическую устойчивость: базовая математическая модель // Стратегическая стабильность, № 4(49), с. 32–39.

Arthur B. W. 1989. Competing technologies, increasing returns, and lock-in by historical events, The Economic Journal, 99(394).

Arthur B. W. 1994. Increasing returns and path dependency in the economy, University of Michigan Press: Ann Arbor.

Arthur W.B. 1996. Increasing Returns and the New World of Business. Harvard Business Review, July-Aug.

Krugman P. 1979. Increasing Returns, Monopolistic Competition, and International Trade // Journal of International Economics, № 9.

Krugman P. 1991. Increasing Returns and Economic Geography // Journal of Political Economy, vol. 99, № 3.

Pierson P. 2000. Increasing returns, path dependence, and the study of politics, American Political Science Review, 94.

Romer P. 1986. Increasing returns and long run growth, Journal of Political Economy, vol. 94, № 5.